Exercice 1. (a) Notons $\langle x, y\rangle = h(x,y)$, alors

$$\begin{aligned}\|\alpha x+\beta y\|^2 &= \langle \alpha x+\beta y,\ \alpha x+\beta y\rangle\\ &= \overline{\alpha}\alpha\langle x,x\rangle+\overline{\alpha}\beta\langle x,y\rangle+\overline{\beta}\alpha\langle y,x\rangle+\overline{\beta}\beta\langle y,y\rangle\\ &= \overline{\alpha}\alpha\langle x,x\rangle+\overline{\alpha}\beta\langle x,y\rangle+\overline{\overline{\alpha}\beta\langle x,y\rangle}+\overline{\beta}\beta\langle y,y\rangle\\ &= |\alpha|^2\|x\|^2+|\beta|^2\|y\|^2+2\mathrm{Re}\left(\overline{\alpha}\beta\,\langle x,y\rangle\right).\end{aligned}$$

(b) Rappelons que si h est une forme hermitienne, alors $\overline{h(x,y)} = h(y,x)$. On a donc par définition $g(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(h(x,y)+\overline{h(x,y)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(h(x,y)+h(y,x)\right)$, qui est clairement symétrique.

De même $\omega(x,y) = \dfrac{1}{2i}\left(h(x,y)-\overline{h(x,y)}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(h(x,y)-h(y,x)\right)$, qui est clairement antisymétrique.

(c) Il est clair que $g : V\times V\to\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel V (vu comme espace vectoriel réel), qui est symétrique car

$$g(x,y) = \mathrm{Re}\ (h(x,y)) = \mathrm{Re}\ \left(\overline{h(y,x)}\right) = \mathrm{Re}\ (h(y,x)) = g(y,x).$$

Alors h est définie positive si et seulement si c'est le cas de g, puisque $g(x,x) = h(x,x)$ (car $h(x,x)\in\mathbb{R}$).

Exercice 2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est la même pour un espace hermitien que pour un espace euclidien. Soient x,y deux vecteurs d'un espaces vectoriel hermitien, alors

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendant.

Pour démontrer cette inégalité, on suit l'indication. On pose $\alpha = \langle x,y\rangle$ et $\beta = -\|x\|^2$ et on calcule :

$$\begin{aligned}0\leq\|\alpha x+\beta y\|^2 &= |\alpha|^2\|x\|^2+|\beta|^2\|y\|^2-2\mathrm{Re}\left(\overline{\alpha}\beta\,\langle x,y\rangle\right)\\ &= |\langle x,y\rangle|^2\|x\|^2+\|y\|^2\|x\|^4-2|\langle x,y\rangle|^2\|x\|^2\\ &= \|x\|^2\left(\|x\|^2\|y\|^2-|\langle x,y\rangle|^2\right).\end{aligned}$$

Si $x=0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est triviale, dans le cas contraire le calcul précédent nous dit que $\|x\|^2\|y\|^2-|\langle x,y\rangle|^2>0$. De plus on a égalité si et seulement si $\alpha x+\beta y=0$, donc si ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Exercice 3. (a) L'application $\rho : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ définie par $\rho(A) = (A - A^*)$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire. Donc son noyau est un sous-espace vectoriel *réel* de $M_n(\mathbb{C})$, or $\mathscr{H}_n = \mathrm{Ker}(\rho)$ (on peut aussi vérifier directement que si $A, B \in \mathscr{H}_n$, alors $(A + B) \in \mathscr{H}_n$ et $\alpha A \in \mathscr{H}_n$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$).

(b) Si $A \in \mathscr{H}_n$, alors en général $iA \notin \mathscr{H}_n$, ici $i = \sqrt{-1}$. Par exemple la matrice identité I_n est hermitienne, mais $\sqrt{-1}\mathrm{I}_n$ n'est pas hermitienne (on remarque d'ailleurs que les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont des nombres réels).

(c) On a $\dim_{\mathbb{R}}(\mathscr{H}_n) = n^2$. Pour le voir on peut par exemple observer que la partie réelle d'une matrice hermitienne $A \in \mathscr{H}_n$ est une matrice symétrique quelconque de $M_n(\mathbb{R})$ et la partie imaginaire de A est une matrice antisymétrique quelconque de $M_n(\mathbb{R})$. On en déduit un isomorphisme d'espaces vectoriel réels

$$\mathscr{H}_n \to M_n(\mathbb{R}), \qquad A \mapsto \mathrm{Re}\,(A) + \mathrm{Im}(A).$$

Il s'agit bien d'un isomorphisme, l'inverse est l'application

$$M_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{H}_n, \qquad A \mapsto \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) + \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(A - A^\top\right).$$

(d) On vérifie trivialement que les matrices $\sigma_j \in \mathscr{H}_2$ (pour $j = 0, 1, 2, 3$). Par le point (c), on sait que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathscr{H}_2) = 4$, il suffit donc de vérifier que ces quatre matrices sont linéairement indépendantes par rapport aux combinaisons linéaires réelles. Il est en effet clair que si

$$\sum_{j=0}^{3} \alpha_j \sigma_j = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 + i\alpha_2 \\ \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Exercice 4. (a) Rappelons que $A = (a_{ij})$ est la matrice de T dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ si et seulement si $Te_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Lorsque cette base est orthonormée (unitaire), on a donc $a_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle$. Notons $B = (b_{ij})$ la matrice de T^*, alors

$$b_{ij} = \langle e_i, T^* e_j \rangle = \langle Te_i, e_j \rangle = \overline{\langle e_j, Te_i, \rangle} = \overline{a}_{ji}.$$

On a donc montrée que $B = \overline{A}^\top$.

(b) Le point (a) nous apprend que le polynôme caractéristique de l'adjoint T^* est

$$\chi_{T^*}(t) = \chi_{\overline{A}^\top}(t) = \chi_{\overline{A}}(t),$$

c'est donc le polynôme dont les coefficients sont les conjugués complexes du polynôme $\chi_A(t) = \chi_T(t)$.

Par conséquent

$$\chi_T(\lambda) = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \chi_{T^*}(\overline{\lambda}) = 0.$$

Exercice 5. (a) Supposons que T est normal, alors

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle = \langle x, TT^*y\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle.$$

Réciproquement, supposons que $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$ pour tous $x, y \in V$. Alors on a par le calcul ci-dessus $\langle x, T^*Ty\rangle = \langle x, TT^*y\rangle$ pour tous $x, y \in V$. Mais ceci n'est possible que si $TT^* = T^*T$.

(b) On a d'une part

$$(T + S^*)(T^* + S) = TT^* + TS + S^*T^* + S^*S,$$

et d'autre part

$$(T^* + S)(T + S^*) = T^*T + T^*S^* + ST + SS^*.$$

Or on a supposé que T et S sont normaux, donc $T^*T = TT^*$ et $S^*S = SS^*$, et que $ST = TS$. On a donc aussi $T^*S^* = S^*T^*$ (car $T^*S^* = (ST)^* = (TS)^* = S^*T^*$). On conclut que

$$(T + S^*)(T^* + S) = (T^* + S)(T + S^*),$$

et donc $(T + S^*)$ est un opérateur normal.

(c) Si on pose $S = \overline{\lambda}\mathrm{I}_V$, alors $S^* = \lambda\mathrm{I}_V$ et S est clairement normal. De plus $TS = ST$, donc par l'exercice précédent on sait que $(T - \lambda\mathrm{I}_V)$ est normal. En utilisant le point (a) on a donc pour tout vecteur non nul $v \in V$,

$$\begin{aligned}
Tv = \lambda v \quad &\Leftrightarrow \quad \|(T - \lambda\mathrm{I}_V)v\| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \|(T - \lambda\mathrm{I}_V)^*v\| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \|(T^* - \overline{\lambda}\mathrm{I}_V)v\| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad T^*v = \overline{\lambda}v.
\end{aligned}$$

Donc v est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ si et seulement si v est (aussi) un vecteur propre de T^* pour la valeur propre $\overline{\lambda}$.

(d) Supposons que $Tv = \lambda v$ et $Tw = \mu w$ avec $\mu \neq \lambda$. Alors d'après le point précédent on sait que $T^*v = \overline{\lambda}v$. On a donc

$$\mu\langle v, w\rangle = \langle v, Tw\rangle = \langle T^*v, w\rangle = \langle \overline{\lambda}v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle.$$

Ainsi $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$, et puisque $\mu \neq \lambda$ on conclut que $\langle v, w\rangle = 0$.

Exercice 6. (a) La matrice A est normale si et seulement si $A^*A = AA^*$. On a $A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$ et donc

$$AA^* = \begin{pmatrix} a\overline{a} + b\overline{b} & a\overline{c} + b\overline{d} \\ \overline{a}c + \overline{b}d & c\overline{c} + d\overline{d} \end{pmatrix} \qquad A^*A = \begin{pmatrix} a\overline{a} + c\overline{c} & \overline{a}\,b + \overline{c}d \\ a\overline{b} + c\overline{d} & b\overline{b} + d\overline{d} \end{pmatrix}$$

On a donc $A^*A = AA^*$ si et seulement si

$$|b| = |c| \quad \text{et} \quad a\overline{c} + b\overline{d} = \overline{a}\,b + \overline{c}d.$$

La deuxième condition peut aussi s'écrire : $b(\overline{a} - \overline{d}) = \overline{c}(a - d)$.

(b) La réponse est négative. Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont normales par le point (a), mais on vérifie facilement que la somme $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice normale.

Exercice 7. (a) Si $x \in \mathrm{Im}(T)$, alors il existe $z \in V$ tel que $x = Tz$. Alors pour tout $y \in \mathrm{Ker}(T^*)$, on a

$$\langle x, y \rangle = \langle Tz, y \rangle = \langle z, T^*y \rangle = 0.$$

Par conséquent $x \in \mathrm{Ker}(T^*)^\perp$, on a donc montré que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T^*)^\perp$. Pour montrer qu'on a égalité, il suffit maintenant de raisonner sur la dimension :

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rang}(T) = \mathrm{rang}(T^*) = \dim(V) - \dim \mathrm{Ker}(T^*) = \dim\left(\mathrm{Ker}(T^*)^\perp\right).$$

(b) L'hypothèse est que $Tw \in W$ pour tout $w \in W$. Soit $v \in W^\perp$, alors pour tout $w \in W$ on a

$$\langle T^*v, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = 0,$$

car $Tw \in W$. Donc $T^*v \in W^\perp$. Comme $v \in W^\perp$, est quelconque, cela montre que $T^*\left(W^\perp\right) \subset W^\perp$.

Exercice 8. (a) Appliquer la formule de polarisation à la forme quadratique $Q(x) = \|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle$.

(b) Si U est unitaire, alors

$$\langle x, U^*Uy \rangle = \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$

pour tous $x, y \in V$. Donc $U^*U = I$.

(c) Par le point (b) on sait que $U^* = U^{-1}$, donc $U^*U = U^{-1}U = I = UU^{-1} = UU^*$.

(d) Supposons que $Ux = \lambda x$ avec $x \in V \setminus \{0\}$. Si U est unitaire, alors

$$\|x\| = \|Ux\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

Donc $|\lambda| = 1$.

(e) Puisque U est normal, on peut appliquer le théorème spectral. Les valeurs propres de U vérifient $|\lambda| = 1$ et donc elle s'écrivent $e^{i\theta}$.
